

• компьютер. число пр-во, изоморфное $\mathbb{C}^N$ век. базиса: $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle$

произв. вектор пр-ва: $|\Psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |j\rangle$ (1.1)

• дискретизация волн. ф-ии: $\Psi(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} \Psi(x_j) d_j(x)$ (возм. упр. $\lambda = \frac{x_0 = x_0}{x_0 + \Delta x = x_1}$
 $x_0 + 2\Delta x = x_2$
 $x_0 + N\Delta x$)
 интервал $d_j = \sqrt{\Delta x}$ и $\lambda_j = \Psi(x_j) \sqrt{\Delta x}$ хар-кал ф-ия отрезка j
 получим вид (1.1)

• измерение частицы - это случ. величина, принимающая значения $|j\rangle$ с вер. $p_j = |\lambda_j|^2$

• представление амплитуды по ф-ле Эйлера $\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\varphi_j}$

фаза φ_j - хар-кт стремление волн. ф-ии к изменению во времени.

• обобщение правила Борна: в баз $|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle, \dots, |\tilde{N-1}\rangle$ измер. $|\Psi\rangle \Rightarrow$ случ. велич.,
 принимающая значения $|\tilde{j}\rangle$ с вер.-ю $\tilde{p}_j = |\langle \tilde{j} | \Psi \rangle|^2$

• правило Борна: вероятность = квадрат модуля амплитуды.

• определение амплитуд: сост. кубита $|\Psi\rangle = \lambda_0 |0\rangle + \lambda_1 |1\rangle$, выносим общ. фазу множ. за скоб.: $e^{i\varphi}$ (нет физ. смысла), надо найти $\lambda_0, |\lambda_1|$ и ϑ ,

ϑ - фаза амплитуды $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\vartheta}$. Измерим много одинак. кубитов $\Rightarrow \lambda_0, |\lambda_1|$

ϑ : измер. в другом базисе (напр. Фурье): $|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|\tilde{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

• квантовая телепортация $\uparrow$

• измерение и наблюдение: 1 - в базисе сост. $|\Psi_j\rangle$, 2 - его же собств. знач.

• унитарный опер.: сохраняет длины векторов в пр-ве $\mathbb{C}^N$

$\exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \Rightarrow U = \exp(iH) \Leftrightarrow U$ -унит., H -эрмитов

• матр. плотность: $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ - эрмитова, $\text{rang} = \text{trace} = 1$

$$C^{NM} = C^N \otimes C^M \Rightarrow |\psi\rangle \in C^N C^M \quad |\psi\rangle = \sum_{j=0, \dots, N-1} \sum_{k=0, \dots, M-1} \lambda_{jk} |j_1 k_2\rangle$$

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \sum_{j=0, \dots, N-1} \sum_{k=0, \dots, M-1} \lambda_{jk} |j_1 k_2\rangle \quad (\text{только для незануμένων})$$

$$\text{тензор } T: T = T_1 T_2 \dots T_k \quad \forall q = 1, \dots, k \quad T_q = \left\{ \begin{matrix} |\psi_i\rangle \\ \langle \psi_i| \end{matrix} \right\} \text{ где } |\psi_i\rangle \in H_i,$$

$$\forall i \exists \leq 2 T_q: \text{ индекс } i, \text{ если на ровню } i, \text{ то только } u \leq v$$

$$] T_j \text{ коммутируют, а } \langle \psi_i | \phi_i \rangle - \text{ простое число} \Rightarrow a |\psi_{i_1}\rangle |\psi_{i_2}\rangle \dots |\psi_{i_r}\rangle \langle \phi_{j_1} | \dots \langle \phi_{j_p} |, a \in \mathbb{C}$$

$$1 \text{ кубит измерение: } p_j = \langle j | \rho_\psi | j \rangle$$

Соединенное состояние — рез-т измерения 1-й части $\forall$ вектора-сост. Композ. сист.

Т. Миллота: $\forall$ сост. $|\psi\rangle$ композ. сист. $\exists$ новые ортонорм баз. $|j_0\rangle, \dots, |j_{N-1}\rangle, |k_0\rangle, \dots, |k_{M-1}\rangle$

$$\text{в пр-лах — канон-ая } C^N, C^M: |\psi\rangle = \sum_{q=0}^S d_q |j_q\rangle |k_q\rangle, \quad S = \min(N-1, M-1)$$

$$\uparrow \text{ численная пер-ка перы запут } |\psi\rangle \in C^N \otimes C^M, \text{ как энтангл } \left\{ \sum_{q=0}^S |d_q|^2 = 1 \right.$$

$$\text{SVD-разложение: } \forall A: S A V = D, \quad \begin{matrix} \text{S.V. — унитарн.} \\ D - \text{диагональн.} \end{matrix}$$

$$\text{Энтангл в комп. сист: энтропия фон Неймана } N(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln(\rho)), \quad \rho - \text{матр. плотн.}$$

$$\text{чистое сост} \Rightarrow N(\rho) = 0, \text{ может уменьш. при расширении сист.}$$

$$\text{преобраз Фур. переводит в гелма-ф-ию Фурье: } f(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ipx/\hbar) f(x) dx = \Phi(p)$$

$$\text{обратное пр.ф: } \Phi(p) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ipx/\hbar) \Phi(p) dp = f(x)$$

дискретная форма:

$$\text{QFT: } |c\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi i a c}{N}\right) |a\rangle \quad \leftarrow \text{унитарные}$$

$$\text{QFT}^{-1}: |a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{c=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i a c}{N}\right) |c\rangle$$

преобр. ф. для волн. ф-ии как илльуса. базиса. Разложить по коорд баз. $\Rightarrow$ обратн. пр. Фурье

- оператор имп.: $(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ $\hat{L}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

матр. Паули

$$\hat{L}_x \hat{L}_y = -\hat{L}_y \hat{L}_x = i \hat{L}_z$$

$$\hat{L}_y \hat{L}_z = -\hat{L}_z \hat{L}_y = i \hat{L}_x$$

$$\hat{L}_z \hat{L}_x = -\hat{L}_x \hat{L}_z = i \hat{L}_y$$

$$\text{или } \lambda_{1,2} = -1, 1 \quad \text{tr} = 0; \det = -1$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = 2i \hat{L}_z$$

$$y, z = 2i \hat{L}_x$$

$$z, x = 2i \hat{L}_y$$

- А и В - канонические $\Rightarrow$ можно прив. ордон. $\Leftrightarrow \exists$ общ. сист. собств. вект.

пример: коорд x , канон. имп. p_y ; канон. имп. p_x , коорд y

- ур-е Шрединг: $i\hbar |\dot{\Psi}\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$, $\hat{H}$ - гамильт., оператор энергии

- реш. зад. Коши: $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}_t |\Psi(0)\rangle$, $\hat{U}_t = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t)$ $\hat{U}_t$ - опер. эволюции

- зная с.в. и с.зн.: $|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \exp(-\frac{i}{\hbar} E_j t) |\varphi_j\rangle$, $\lambda_j = \langle \varphi_j | \Psi \rangle$

- ур-е Шрединг для матр. механики: $i\hbar \dot{\rho} = [\hat{H}, \rho] = \hat{H}\rho - \rho\hat{H}$

- КОУ: $i\hbar \dot{\rho} = [\hat{H}, \rho] + i\mathcal{L}(\rho)$; $\mathcal{L}(\rho) = \sum_{j=1}^{N^2-1} \chi_j (A_j \rho A_j^\dagger - \frac{1}{2} \{A_j^\dagger A_j, \rho\})$

A_j - факторы декогерентности; χ_j - интенсивность его фактвиз.

- CNOT: $|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus x\rangle$ Toffoli: $|x, y, z\rangle \rightarrow |x, y, z \oplus xy\rangle$ $\text{Sign} = (-1)^{x \cdot y} |x, y\rangle$

- ускорение алг. Гровера: $T_{\text{рем.}}: \frac{\pi \sqrt{N}}{4}$; $L_{\text{рем.}}: \frac{\pi \sqrt{N}}{e}$; $L_{\text{квант.}}: O(\sqrt{N})$

- энергия взаимодействия: $g = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{V}} d E(x)$, V - эффектив. об'ем полости, d - абс. велич. дипольн. момента $|\langle 0 | x | 1 \rangle|$

$E(x)$ - фактор распада атома внутри полости.

$$a: |n\rangle_{ph} \rightarrow \sqrt{n} |n-1\rangle_{ph}; \quad a^\dagger: |n\rangle_{ph} \rightarrow \sqrt{n+1} |n+1\rangle_{ph}$$

$$RWA: \frac{g}{\hbar \omega} \ll 1$$

$$\bar{G} = \sum_{j=1}^n g_j \hat{G}_j \quad \bar{G}^\dagger - \text{аналог.}$$

$$H_{sc} = \hbar \omega a^\dagger a + \hbar \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + g(a^\dagger + a)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$$

$$RWA: g(a^\dagger \hat{b} + a \hat{b}^\dagger)$$

$$H_{TC} = \hbar \omega a^\dagger a + \hbar \omega \sum_{j=1}^n \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + (a^\dagger + a)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$$

$$RWA: g_j(a \hat{b}_j^\dagger + a^\dagger \hat{b}_j)$$

$$H_{TC} = \sum_{i=1}^m H_{TC}^i + \sum_{1 \leq i, j \leq m} M_{ij} (a_i^\dagger a_j + a_i a_j^\dagger)$$

M_{ij} - амплитуда перем. рн уз. нод. i и j

• μ -во темн. $\text{Dark}^{RWA} = \ker(\hat{G})$; $\text{Trans}^{RWA} = \ker(\hat{G}^\dagger)$; $\text{Invis}^{RWA} = \text{Dark} \cap \text{Trans}$

• для многочл. H_{TC} : $\text{Dark} = \text{Trans} = \text{Invis} = \ker(\hat{G}^\dagger + \hat{G}) = \ker(\hat{G}) \cap \ker(\hat{G}^\dagger)$

• Теорема: при физ. кат. и кет, оптич. проводим графов одинак при импед. Стока $\gamma_{out} \Rightarrow$ эти графы изоморфны.

$$P(t) = \langle \sin k | \hat{\rho} | \sin k \rangle - \text{опт. провод.}$$

• кр-во Фейнман: $M(\frac{1}{2}) \leq 1/2$; $M(\frac{1}{2})$ - мат. ожид. симп. вел. $\frac{1}{2}$

• квант. телепортация: $|EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle)$ передать; $|\Psi_C\rangle = \alpha|0_C\rangle + \beta|1_C\rangle$

$CNOT(C, A)$, $H|C\rangle$, измерят, рез. $\rightarrow$ бита: r_A и r_C $A=C \Rightarrow$ уже было

• клонировать состояние. ($\forall U: U|\Psi\rangle|0\rangle = |\Psi\rangle|\Psi\rangle$)

иначе - проект. операция

$$A^c \hat{G} \Rightarrow \hat{G}_z$$

$$10 \Rightarrow \hat{G}_x$$

$$11 \Rightarrow -\hat{G}_z \hat{G}_x$$

• операторы, соотв. класс. величинам:

коорд: $\hat{x}: f(x) \rightarrow x f(x)$; С. ж. и с. ф.: - вол. ф-ция, осб, - гильберт-функции

импульс: рх вдоль оси х $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, полный имп. $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$; С. ж. и с. ф.-и:

$$\text{Энергия: } H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \rightarrow \text{потенц.}$$

$$\text{С. ф.-и: } A \cos \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar^2}} x + B \sin \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar^2}} x$$

- Ψ , кот. можно приписать

$$- \Psi = c e^{\frac{i}{\hbar} p x} \quad \text{физ. величина}$$

• коммутативн. $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

• Тензорное произведение: - пространства: $V \otimes W$ над общ. полем K :

- операторы: $\left. \begin{array}{l} \text{вект. пр.-во } T \text{ и операция } \otimes: V \otimes W \rightarrow T \text{ } (x, y) \rightarrow x \otimes y \\ \text{т.е. } \{e_i \otimes f_j\} - \text{базис } T \text{ если } \{e_i\}, \{f_j\} - \text{базис } V, W \end{array} \right\}$

$$\alpha: V \rightarrow V \quad \beta: W \rightarrow W$$

$$\text{кажд. } \alpha \otimes \beta: V \otimes W \rightarrow V \otimes W$$

$$\text{на баз. вект.: } (\alpha \otimes \beta)(e_i \otimes f_j) = (\alpha e_i) \otimes (\beta f_j)$$

$$T = h(e_i \otimes f_j)$$

- состояния: $\psi_1 = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j e_j \in h_1$ $\psi_1 \otimes \psi_2 = \sum_{j=0, N-1} \sum_{i=0, N-1} \lambda_j \mu_i (e_i \otimes f_j)$

$$\psi_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i f_i \in h_2$$

$$\text{- матрица } \alpha \otimes \beta = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}\beta_{11} & \dots & \alpha_{m1}\beta_{1n} \end{bmatrix}$$

• запут. сост. нельзя предст. в виде тенз. произв. сост. $\psi_1 \otimes \psi_2$ (напр. $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$)

• однокуб. вейт: $U_t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} e^{i\varphi}$ $U \otimes T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{Ad: } H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $W-H = H \otimes I$

• квант. алгоритм: классич. цепь: $c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$; квант. цепь: $\psi_0 \xrightarrow{W(c_1)} \psi_1 \xrightarrow{W(c_2)} \dots \xrightarrow{W(c_n)} \psi_n$

квант. вычисл.: совм. эволюция классич. и квант. части, в конце - измер. сост. квант. [2]

• фазор: $\rightarrow C_2^*$ - вопрос к фазору вместо ω , триплетная QFT - квант. версия фазора φ
 $\uparrow$ в квант. случае
 унитарный оператор

• ancilla - вспомогат. ячейки на квантовой ленте, обычно добавл. в сост. $|0\rangle|0\rangle\dots|0\rangle$
 $\uparrow$
 может затеряться во время вычислений

• сдвиг аннуляции: $|x_1\rangle \rightarrow |x_2\rangle = \text{---} \otimes \text{ancilla}$

• QFT: поиск собств. частот унит. операторов, диф. $\rightarrow$ хар-м. частоты, скрыт. периоды (поиск в $\Delta\varphi$ -ин-ом ω)

• Шимурт: транзит. не веро. напр., а 1 вектор (экономич. хранение сост.)

• Записи-Визуер: модулирует, а не считывает. раб. за $(\Delta t)^2$ время (замедление по ср. с классич. алг.), но выигрыш в памяти.

• дискрет. форма оператора умножения $P_{\text{discr}} = A^{-1} QFT^{-1} \sqrt{N} \chi_{\text{discr}} QFT A$

с.б.: $A^{-1} QFT^{-1} |a\rangle$; с.м.: $\sqrt{N}^{-1} (a - \frac{1}{2})$ $a = 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$; $A = \text{diag}(e^{i\pi a^2})_{a=0,1,\dots,N-1}$

к-к-к оператора коорг.: $\chi_{\text{discr}} = \text{map quadr.}$; $0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$

с.б.: $\cos \pi |0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle$; с.м.: $0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$

числов. сост.: $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ матрица

иначе: $\rho = \sum_i p_i |v_i\rangle \langle v_i|$

результ.: $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

большой шаг (сравнить с $\hbar$ точности) $\rightarrow$ малый шаг $\Rightarrow$ квант